

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Clasa a V-a**

- Timp de lucru 120 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

**Problema 1.**

- a) Calculați  $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4$ ;
- b) Arătați că numărul  $a = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{20}$  este divizibil cu 78;
- c) Aflați restul împărțirii numărului  $n = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2024} + 5^{2025}$  la 780

*Supliment GM 10/2024 - enunț modificat*

**Problema 2.**

- (a) Determinați cel mai mare număr natural de forma  $\overline{2025a_1a_2\dots a_n2025}$ , pentru care suma cifrelor este 50, știind că  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt cifre diferite de zero.
- (b) Determinați cel mai mic număr natural de forma  $\overline{2025a_1a_2\dots a_n2025}$ , pentru care suma cifrelor este 2024

**Problema 3.** George dorește să cumpere câteva mingi și câteva mașinuțe.

Dacă ar cumpăra 3 mingi și 2 mașinuțe, George ar trebui să plătească 65 de lei, iar dacă ar cumpăra 4 mingi și o mașinuță ar trebui să plătească 70 de lei. Câți lei ar trebui să plătească George dacă ar cumpăra 2 mingi și 3 mașinuțe?

**Problema 4.** Se consideră șirul de numere naturale 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

- a) Scrieți următorii patru termeni ai șirului;
- b) Aflați al 100-lea termen al șirului;
- c) Calculați suma primilor 2025 de termeni ai șirului.

*SGM 3/2024*

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**BAREME Clasa a V-a.**

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

**Problema 1.**

- a)  $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 780$ ; (1p)
- b) Numărul  $a$  are 20 de termeni pe care îi grupăm câte 4, formând 5 grupe complete. (1p)

$$\left. \begin{aligned} a &= (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + (5^5 + 5^6 + 5^7 + 5^8) + \dots + (5^{17} + 5^{18} + 5^{19} + 5^{20}) \\ a &= (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + 5^4 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \dots + 5^{16} \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) \end{aligned} \right\} (1p)$$

$$a = 780 \cdot (1 + 5^4 + \dots + 5^{16}), \text{ deci } a \text{ este divizibil cu } 78 \quad (1p)$$

- c) Numărul  $n$  are 2025 de termeni pe care îi grupăm câte 4, formând 506 grupe complete și un termen rămâne negrupat.

$$n = (5^{2025} + 5^{2024} + 5^{2023} + 5^{2022}) + \dots + (5^5 + 5^4 + 5^3 + 5^2) + 5 \quad (1p)$$

$$n = 780 \cdot (5^{2021} + 5^{2017} + \dots + 5) + 5, n = 780 \cdot c + r, r < 780;$$

$$c \text{ și } r \text{ sunt unic determinate.} \quad (1p)$$

Restul împărțirii lui  $n$  la 780 este egal cu 5. (1p)

**Problema 2.**

- a) Suma cifrelor numărului este egală cu  $18 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 50$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 32$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt cifre diferite de zero. (2p)

Pentru a determina cel mai mare număr de forma  $\overline{2025a_1a_2\dots a_n2025}$ , pentru care suma cifrelor este egală cu 50, trebuie să folosim 32 cifre de 1. Numărul este 20251111...12025, unde cifra 1 apare de 32 de ori. (2p)

- b) Suma cifrelor numărului este egală cu  $18 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2024$ ,  
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2006$ , (1p)

Pentru a determina cel mai mare număr de forma  $\overline{2025a_1a_2\dots a_n2025}$ , pentru care suma cifrelor este egală cu 2024, trebuie să folosim cât mai multe cifre de 9 a căror sumă ne dă 2006. (1p)

$2006 : 9 = 222$  rest 8. Numărul este 20258999...92025, unde cifra 9 apare de 222 de ori. (1p)

**Problema 3.**

$$\left. \begin{array}{ll} 3 \text{ mingi} & \dots\dots\dots 2 \text{ mașinuțe} \dots\dots\dots 65 \text{ lei} \\ 4 \text{ mingi} & \dots\dots\dots 1 \text{ mașinuță} \dots\dots\dots 70 \text{ lei} \\ 5 \text{ mingi} & \dots\dots\dots 140 - 65 = 75 \text{ lei} \\ 1 \text{ minge} & \dots\dots\dots 15 \text{ lei} \end{array} \right\} \cdot 2 \quad (3p)$$

1 mașinuță .....10 lei (3p)

2 mingi.....3 mașinuțe .....  $2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 60$  lei. (1p)

**Problema 4.**

- a) Se observă că diferența dintre doi termeni consecutivi este egală cu 4. Următorii 4 termeni sunt 27; 31; 35; 39 (1p)

- b) Primul termen este  $3 = 4 \cdot 0 + 3$ , al doilea termen este  $7 = 4 \cdot 1 + 3$ , al treilea termen este  $11 = 4 \cdot 2 + 3$ , al patrulea termen este  $15 = 4 \cdot 3 + 3, \dots$ , al 100-lea termen este  $4 \cdot 100 + 3 = 403$  (3p)

- c) Suma primilor 2025 de termeni este egală cu:

$$S = (4 \cdot 0 + 3) + (4 \cdot 1 + 3) + (4 \cdot 2 + 3) + \dots + (4 \cdot 2024 + 3)$$

$$S = 4 \cdot (0 + 1 + 2 + \dots + 2024) + 3 \cdot 2025$$

$$S = 4 \cdot (2024 \cdot 2025) : 2 + 3 \cdot 2025$$

$$S = 8203275. \quad (3p)$$